DL de solutions d'une équation différentielle

Les fonctions considérées ici sont toutes réelles.

1. Résoudre sur $I=]-\pi/2,\pi/2[$ l'équation différentielle $\cos(t)z''(t)-2\sin(t)z'(t)-\cos(t)z(t)=0$.
   On pourra réaliser le changement de fonction inconnue : $\varphi(t)=\cos(t).z(t)$.
2. Résoudre sur $J=]-1,1[$ l'équation différentielle $(1-x^2)y''(x)-3xy'(x)-y(x)=0$.
   On pourra réaliser le changement de variable : $x=\sin t$.
3. Soit f une solution de l'équation précédente.

3.a Justifier que f est $\mathcal{C}^\infty$.

3.b Observer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+3)xf^{(n+1)}(x)-(n+1)^2f^{(n)}(x)=0$.

3.c Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $a_n=f^{(n)}(0)$. Former une relation liant a_{n+2} et a_n.

3.d Exprimer a_{2p+1} et a_{2p} en fonction respectivement de a_1 et a_0, et à l'aide de nombres factoriels.

4. Exprimer :

a. Le $DL_{2n+1}(0)$ de $x\mapsto\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$,

b. Le $DL_{2n}(0)$ de $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

c. Le $DL_{2n+1}(0)$ de $x\mapsto\arcsin x$.

5. En déterminant le coefficient de x^{2n+1} dans le produit des deux derniers développements limités obtenir la formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}=\frac{16^n}{(n+1)\binom{2n+1}{n}}$.

Correction

1. Soit $z:I\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable et $\varphi:I\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t)=\cos t\,z(t)$. φ est deux fois dérivable et $\varphi''(t)=\cos t.z''(t)-2\sin t.z'(t)-\cos(t).z(t)$.
   z est solution sur I de l'équation différentielle considérée ssi $\varphi''=0$ i.e.
   $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall t\in I,\varphi(t)=\lambda t+\mu$ ce qui donne $z(t)=\dfrac{\lambda t+\mu}{\cos t}$.
2. Soit $y:J\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z:I\to\mathrm{R}$ définie par $z(t)=y(\sin t)$.
   z est deux fois dérivable et $\forall x\in J,y(x)=z(\arcsin x)$.
   On a $y'(x)=\dfrac{z'(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$ et $y''(x)=\dfrac{z''(\arcsin x)}{1-x^2}+\dfrac{xz'(\arcsin x)}{(1-x^2)^{3/2}}$.
   Par suite :
   $\forall x\in J,(1-x^2)y''(x)-3xy'(x)-y(x)=0$
   $\Leftrightarrow\forall x\in J,z''(\arcsin x)-\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}z'(\arcsin x)-z(\arcsin x)=0$
   $\Leftrightarrow\forall t\in I,z''(t)-\dfrac{2\sin t}{\cos t}z'(t)-z(t)=0$,
   $\Leftrightarrow\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall t\in I,z(t)=\dfrac{\lambda t+\mu}{\cos t}$
   $\Leftrightarrow\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall x\in J,y(x)=\dfrac{\lambda\arcsin x+\mu}{\sqrt{1-x^2}}$

3.a $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{\lambda \arcsin x + \mu}{\sqrt{1-x^2}}$.

f est donc $\mathcal{C}^\infty$ par opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

3.b Par la formule de Leibniz :

$((1-x^2)f''(x))^{(n)} = (1-x^2)f^{(n+2)}(x) - 2nxf^{(n+1)}(x) - n(n-1)f^{(n)}(x)$

et $(3xf'(x))^{(n)} = 3xf^{(n+1)}(x) + 3nf^{(n)}(x)$.

En dérivant à l'ordre n l'équation $(1-x^2)f''(x) - 3xf'(x) - f(x) = 0$

on obtient : $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2 f^{(n)}(x) = 0$.

On peut aussi procéder par récurrence, c'est plus sûr mais aussi plus lourd.

3.c En évaluant en 0 : $f^{(n+2)}(0) - n^2 f^{(n)}(0) = 0$ d'où $a_{n+2} = (n+1)^2 a_n$.

3.d $a_{2p+1} = (2p)^2 a_{2p-1} = (2p)^2(2p-2)^2 ... 2^2 . a_1 = 2^{2p}(p!)^2 a_1$.

$a_{2p} = (2p-1)^2 a_{2p-2} = (2p-1)^2(2p-3)^2 ... 1^2 . a_0 = \dfrac{((2p)!)^2}{2^{2p}(p!)^2} a_0$.

4.a $f : x \mapsto \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ est solution de l'équation différentielle étudiée avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$.

La formule de Taylor-Young donne : $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{2n+1} \dfrac{a_k}{k!} x^k + o(x^{2n+1}) = \sum_{p=0}^{n} \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1} + o(x^{2n+1})$.

4.b $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est solution de l'équation différentielle étudiée avec $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$.

La formule de Taylor-Young donne :

$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{2n} \dfrac{a_k}{k!} x^k + o(x^{2n}) = \sum_{p=0}^{n} \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} x^{2p} + o(x^{2n})$.

4.c En intégrant ce DL et sachant $\arcsin 0 = 0$: $\arcsin x = \sum_{p=0}^{n} \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(2p+1)(p!)^2} x^{2p+1} + o(x^{2n+1})$

5. Le coefficient de x^{2n+1} dans le $DL_{2n+1}(0)$ de $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

D'autre part on obtient un coefficient en x^{2n+1} dans le développement du produit $\arcsin x \times \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en croisant un x^{2k+1} du DL de $\arcsin x$ avec un $x^{2(n-k)}$ du DL de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, par suite le coefficient de x^{2n+1} dans le $DL_{2n+1}(0)$ de $\arcsin x \times \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est encore

$\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(2k)!}{2^{2k}(2k+1)(k!)^2} \times \dfrac{(2(n-k))!}{2^{2(n-k)}((n-k)!)^2} = \dfrac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2k+1} \dfrac{(2k)!}{(k!)^2} \dfrac{(2(n-k))!}{((n-k)!)^2}$

d'où l'identité : $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{2k+1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \dfrac{16^n}{(n+1)\binom{2n+1}{n}}$ mais était-ce raisonnable ?